Anwendungen der Differentialrechung (vgl. LS11, Kapitel VIII)

(1) Vorgehen beim Lösen von Extremwertproblemen

1. Beschreiben der Größe, die extremal werden soll, durch einen Term, der mehrere Variablen enthalten kann.
2. Formulieren von gegebenen Nebenbedingungen.
3. Bestimmen der Zielfunktion, die nur noch von einer Variablen abhängt.
4. Untersuchen der Zielfunktion auf Extremwerte und Formulierung des Ergebnisses. Hier sind auch Randwerte zu berücksichtigen.

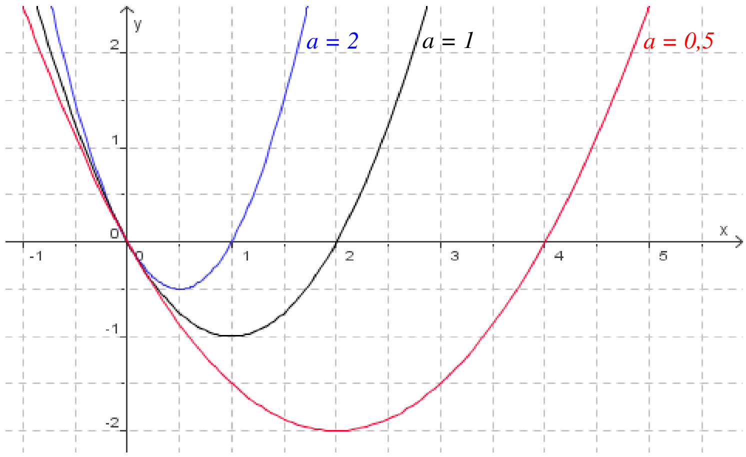
---

(2) Funktionen mit Parametern

Enthält ein Funktionsterm außer der Variablen x noch eine weitere (von x unabhängige) Variable a, so gehört zu jedem möglichen Wert von a eine Funktion $f_a : x \to f_a(x)$.

Die Variable a nennt man Parameter; die Menge dieser Funktionen bezeichnet man als **Funktionenschar**.

Beispiel: $f_a = ax^2 - 2x$



---

(3) Vorgehen bei einer Funktionsbestimmung

Um eine Funktion f zu bestimmen, die vorgegebene Eigenschaften hat, z.B.
- Punkte auf dem Graphen,
- Extremstellen oder die Steigung des Graphen an einer Stelle,
- Nullstellen oder Polstellen,

sind diese Eigenschaften (Bedingungen) mithilfe von f oder f' als Gleichung zu formulieren und das Gleichungssystem zu lösen. Die nötige Anzahl von Gleichungen wird durch die Zahl der Parameter im Funktionsterm bestimmt.
Die Berücksichtigung von besonderen Eigenschaften, wie z.B. Symmetrie oder Existenz einer waagrechten Asymptote, kann gegebenenfalls den Ansatz für den Funktionsterm vereinfachen, insbesondere, wenn in realen Situationen das Koordinatensystem geeignet gewählt wird.

---

(4) Vorgehen bei einer Funktionsanpassung

1. Daten in ein Koordinatensystem eintragen.
2. Mithilfe von Parametern Gleichung einer Funktion aufstellen, deren Graph näherungsweise durch die gegebenen Punkte gehen soll.
3. Je nach Zahl der Parameter die Koordinaten einer entsprechenden Zahl von Punkten in die 4. Funktionsgleichung einsetzen und das entstandene Gleichungssystem lösen.
4. Mithilfe der Koordinaten weiterer Punkte die Brauchbarkeit der gefundene Funktion überprüfen.

Beispiel:

x	0	1	2	3	4
y	1,0	1,5	2,6	4,3	6,6

Ansatz:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

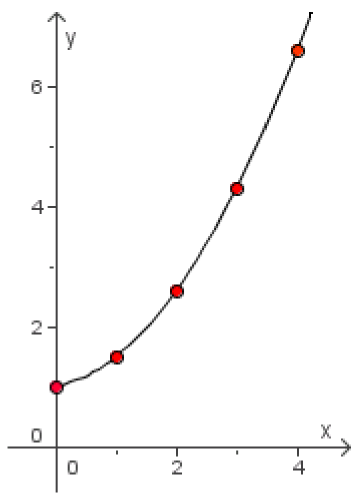
$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$

$f(1) = 1{,}5 \Rightarrow a + b = 0{,}5$

$f(4) = 6{,}6 \Rightarrow 16a + 4b = 5{,}6$

Die Lösung liefert: $a = 0{,}3; b = 0{,}2; c = 1$

Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}2x + 1$



Übungs-/Beispielaufgaben

1. Welche zwei positiven Zahlen mit dem Produktwert 10 haben den kleinsten Summenwert?

2. Die Stirnseite einer 12m hohen Schwimmhalle soll ein parabelförmiges (Gleichung der Parabel: $y = -\frac{1}{9}x^2 + 12$) Profil erhalten. Welchen maximalen Flächeninhalt kann ein rechteckiges Fenster auf dieser Seite haben?

Lösungen:

1. $S = u + v$

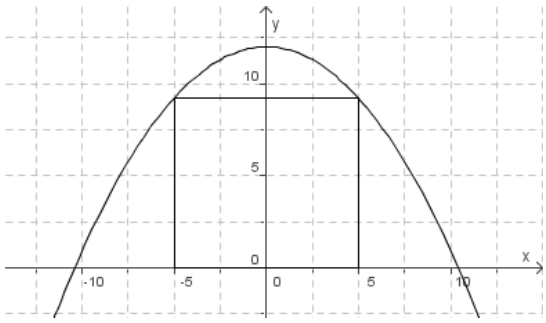
Nebenbedingung: $u \cdot v = 10$

Zielfunktion: $S(u) = u + \frac{10}{u}$

$S'(u) = 1 - \frac{10}{u^2}$

Extremum: $S'(u) = 0 \Rightarrow u = v = \sqrt{10}$

2.



Halbe Fensterbreite (in m): x , wobei $x \geqq 0$

Fensterhöhe (in m): y, wobei $y \geqq 0$

Zielgröße (in m^2): $A = 2x \cdot y$

Nebenbedingung: $y = -\frac{1}{9}x^2 + 12$

Zielfunktion A:

$A(x) = 2xy = 2x \cdot (-\frac{1}{9}x^2 + 12) = -\frac{2}{9}x^3 + 24x; \quad D_A =]0; 6\sqrt{3}[$

Extremwerte:

$A'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 24; \; A''(x) = -\frac{4}{3}x; \quad D_{A'} = D_{A''} =]0; 6\sqrt{3}[$

$A'(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 \in D_{A'}; \; x_2 = -6 \notin D_{A'}$

$2x_1 = 12$

$y_1 = -\frac{1}{9}x_1^2 + 12 = -\frac{36}{9} + 12 = 8$

Da $A''(x_1) < 0$ ist, nimmt die Funktion A für x = 6 ihr lokales Maximum $A(6) = -\frac{2}{9} \cdot 6^3 + 24 \cdot 6 = 96$ an. Die Randwerte $A(0) = 0$ und $A(6\sqrt{3}) = 0$ stellen das globale Minimum von A dar.

Das größtmögliche Fenster besitzt die Breite 12m, die Höhe 8m und den Flächeninhalt 96m^2.